数理解析研究所講究録
374巻 1980年 37-48

Seminormal rings の判定法と構造

阪大 理学部 吉田憲一

1. 設定； Rを有限次元のネーター整域，AをRの部分環で，双有理かつ，RをA-加群とみて有限生成とする。従って Rは A上 integral である。このR及びAに対して，$A_i(R)$，$\mathcal{D}_i(A,R)$ を次の様に帰納的に定義する。ここで $\mathfrak{c}(B/A)$ は B/A の conductor。 $0 \leqq i \leqq d$ ，$d = \dim A$ とする。

(i) $A_0(R) = R$ $\qquad \mathcal{D}_0(A,R) = \phi$

(ii) $\mathcal{D}_1(A,R) = \{ Ht_1(A) \ni \mathfrak{p} ,\ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{c}(A_0(R)/A) \}$

(iii) $i \geqq 1$ に対して $\mathcal{D}_i(A,R) = \{ Ht_i(A) \ni \mathfrak{p} ,\ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{c}(A_{i-1}(R)/A) \}$

(iv) $A_i(R) = A_{i-1}(R) \cap \bigcap A_{\mathfrak{p}}$ ，$\mathfrak{p} \in \mathcal{D}_i(A,R)$

(v) $\mathcal{D}(A,R) = \bigcup_{i=1}^{d} \mathcal{D}_i(A,R)$

(vi) $R = \bar{A}$ のときはとくにRを省略する。

この定義の説明をします。RとAとの関係を知るのに $\mathfrak{c}(R/A)$ だけでは充分と言えません。たとえば次の例を見て

下さい。

例；$R = k[x, y] \supset A = \{ k[x, y] \ni f(x, y)\,;$ $f(t, 0) = f(0, t)$，t は変数，かつ $f(0, 0) = f(1, 0) \}$ とすれば R/A は双有理かつ integral な拡大となっています。このとき $\mathfrak{c}(R/A) = xyR$ で xyR は A の高さが1の素イデアルになっています。ところで A の極大イデアル $(x(x-1), y)R$ はこのままでは $\mathfrak{c}(R/A)$ には表われませんが，R と A との関係では大切な素イデアルです。そこで $A_1(R) = R \cap A_{xyR}$ とすれば，$\mathfrak{c}(A_1(R)/A) = (x(x-1), y)R$ として，私達は極大イデアル $(x(x-1), y)R$ を得る事が出来るわけです。実際 $A_1(R) = R \cap \bigcap A_{\mathfrak{p}}$，$\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}_1(A, R)$ としたので次の補題により，$\mathfrak{c}(A_1(R)/A)$ はもはや高さ1の素イデアルには含まれない。

補題；$A \subset B \subset R$ に対して

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \text{ について } A_{\mathfrak{p}} \supseteq B \iff \mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{c}(B/A)$$

2. 定義から出てくる性質.

命題1. (i) $\mathfrak{D}_i(A, R)$ の各元は $\mathfrak{c}(A_{i-1}(R)/A)$ の極小素因子である。従って $\mathfrak{D}_i(A, R)$ は有限集合.

(ii) $A_d(R) = A$

(iii) 従って $A = R \cap \bigcap A_{\mathfrak{p}}$，$\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}(A, R)$

(iv) $\mathfrak{D}_i(A, R) \subseteq \mathfrak{D}_i(A)$

証明．(i) $\mathfrak{D}_i(A, R) \ni \mathfrak{q}$，$ht\,\mathfrak{q} = i$ で定義より $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{f}(A_{i-1}(R)/A)$．今 $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{q}$ で $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}(A_{i-1}(R)/A)$ とすれば $j = ht\,\mathfrak{p} < i$ 故 $A_{j-1}(R) \supseteq A_{i-1}(R)$，従って $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}(A_{j-1}(R)/A)$ を得るから，$\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}_j(A, R)$ ∴ $A_{\mathfrak{p}} \supseteq A_j(R) \supseteq A_{i-1}(R)$，これは先の補題から $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{f}(A_{i-1}(R)/A)$ となり，$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}(A_{i-1}(R)/R)$ とした事に反する。

よって $\mathfrak{D}_i(A, R)$ の各元は $\mathfrak{f}(A_{i-1}(R)/A)$ の極小素因子である。

(ii) $\mathfrak{f}(A_d(R)/A)$ はもはやどの素イデアルにも含まれないから，$\mathfrak{f}(A_d(R)/A) = (1)$，∴ $A = A_d(R)$．

(iv) $\mathfrak{D}_1(A, R) \ni \mathfrak{p}$，$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}(R/A) \supseteq \mathfrak{f}(\bar{A}/A)$ 故 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}_1(A)$ を得る．従って $A_1(R) \subseteq A_1$ である。これを順次くりかえして $\mathfrak{D}_i(A, R) \subseteq \mathfrak{D}_i(A)$ を得る。特に $\mathfrak{D}(A)$ について考えると，

命題２．$\mathfrak{D}(A) = \{ \mathrm{Spec}\,A \ni \mathfrak{p}$，$ht\,\mathfrak{p} = 1$ のときは $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}(\bar{A}/A)$，$ht\,\mathfrak{p} > 1$ のときは $\mathrm{depth}\,A_{\mathfrak{p}} = 1 \}$

とくに A が normal ring であるための必要十分条件は $\mathfrak{D}(A) = \phi$．これは Serre' criterion に他ならない。

命題２を示すために次の命題を与えよう。

命題3. $\mathrm{Spec}\,A \ni \mathfrak{p}$, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} > 1$ なる素イデアル $\mathfrak{p}$ について次はすべて同値である。

(i) $\mathfrak{p} \in \mathbb{D}(A)$

(ii) $\mathfrak{p} \ni a \neq 0$ であれば, $\mathfrak{p}$ は aA の (embedded) prime divisor.

(iii) $\mathbb{Q}(A) \ni {}^{\exists}\alpha \neq 0$, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}_\alpha = \{A \ni a,\ a\alpha \in A\}$ の prime divisor. $\mathbb{Q}(A)$ は A の商体。

(iv) $\mathbb{Q}(A) \ni {}^{\exists}\alpha \neq 0$, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}_\alpha$ の minimal prime divisor。

(v) $\mathbb{Q}(A) \ni {}^{\exists}\alpha \neq 0$, $\mathfrak{a}_\alpha$ は $\mathfrak{p}$ に属する primary ideal。

(vi) $A \subset {}^{\exists}B \subset \bar{A}$, 中間環 B が存在して, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{f}(B/A)$ の prime divisor。

(vii) $A \subset {}^{\exists}B \subset \bar{A}$, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{f}(B/A)$ の minimal prime divisor。

(viii) $A \subset {}^{\exists}B \subset \bar{A}$, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{f}(B/A)$ を prime ideal にもつ。

(ix) $\mathrm{depth}\,A_{\mathfrak{p}} = 1$ 。

証明. (i) ⇒ (vii), (vii) ⇒ (vi) は明らか。

(vi) ⇒ (viii) を示す。 $\mathfrak{f}(B/A) = Q \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$, $\sqrt{Q} = \mathfrak{p}$ とする。 $C = A + (Q_1 \cap \cdots \cap Q_r)B$ とおくと, C は $\bar{B}/A$ の中間環で $\mathfrak{f}(C/A)$ は $\mathfrak{p}$ に属する primary ideal である事が簡単にわかる。

(viii) ⇒ (ix) を示す。 B を $\bar{A}/A$ の中間環で, $\mathfrak{f}(B/A)$ が

$\mathfrak{p}$ に属する primary ideal なるものとする。今 depth $A_{\mathfrak{p}} \geq 2$ とすれば、$\exists a, b \in \mathfrak{p}$, a, b は $A_{\mathfrak{p}}$-seq であるがとくに $a, b \in \mathfrak{f}(B/A)$ としてよい。

$B \ni {}^{\forall}\alpha$ をとってくると、$a, b \in \mathfrak{f}(B/A)$ としたので、$a\alpha = c$, $b\alpha = d \in A$. ∴ $\alpha = \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ から我々は $ad = bc$ を得るが、a, b は $A_{\mathfrak{p}}$-seq 故 $d \in bA_{\mathfrak{p}}$

∴ $\alpha \in A_{\mathfrak{p}}$ よって $B \subsetneq A_{\mathfrak{p}}$ を得るが、これは $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}(B/A)$ に反する。

(ix) $\Rightarrow$ (ii) を示す。$\mathfrak{p} \ni a \neq 0$, 今 $aA_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \subsetneq \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ とすれば、$\exists b \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, $b \notin \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ である。このとき a, b は $A_{\mathfrak{p}}$-seq となるから、depth $A_{\mathfrak{p}} \geq 2$.

(ii) $\Rightarrow$ (v) を示す。$\mathfrak{p} \ni a \neq 0$. $aA = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$, $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$, であるが、$\exists b \in \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$, $b \notin \mathfrak{q}$, そこで $\alpha = \frac{b}{a}$ とおくと、$\mathfrak{a}_\alpha$ が $\mathfrak{p}$ にぞくする primary ideal である事が簡単にわかる。

(v) $\Rightarrow$ (iv), (iv) $\Rightarrow$ (iii) は明らか。

最後に (iii) $\Rightarrow$ (i) を示せばよい。(iii) $\Rightarrow$ (i) を示す。

(iii) において、とくに $\alpha \in \bar{A}$ にとれる事を見よう。$\alpha \notin \bar{A}$ とする。$I_\alpha = \{\bar{A} \ni x,\ x\alpha \in \bar{A}\} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$, $\sqrt{Q_i} = P_i$ とおく。このとき $\mathfrak{a}_\alpha \subseteq I_\alpha \subseteq Q_i \subseteq P_i$ 故 $P_i \cap A = \mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}_\alpha}$ を得る。

今 $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$, $1 \leq i \leq u$ とすると, $^\exists x \in Q_1 \cap \cdots \cap Q_u \cap A$, $x \notin \mathfrak{p}$ がとれるので $\beta = x\alpha$ とおけば $\beta \in \bar{A}$ で $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}_\beta$ ($\because x \notin \mathfrak{p}$) よって α のかわりに β をとればよい。

今 $P_1 \cap A = \mathfrak{p}$ とする。従って $^\exists P \in Ht_1(\bar{A})$, $P \cap A = \mathfrak{p}$ である。そこで $\mathfrak{f}(\bar{A}/A) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s \cap Q_{s+1} \cap \cdots \cap Q_r$ $\sqrt{Q_i} = P_i$ $P_1 \cap A = \cdots = P_s \cap A = \mathfrak{p}$, $P_{s+1}, \cdots, P_r$ はそれ以外, という準素イデアル分解が出来る。$Q_1 \cap \cdots \cap Q_s \cap A = \mathfrak{q}$ $Q_{s+j} = \mathfrak{q}_{s+j}$ とおく。$\mathfrak{f}(\bar{A}/A)$ は A のイデアル故 $\mathfrak{f}(\bar{A}/A) = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}_{s+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$

今 $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}_{s+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ とする。$Q_1 \cap \cdots \cap Q_s \not\supseteq Q_{s+1} \cap \cdots \cap Q_r$ 故 $^\exists \beta \in Q_{s+1} \cap \cdots \cap Q_r$ で $\beta \notin Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ が存在する。$\beta \in \bar{A}$ で $\mathfrak{a}_\beta$ は $\mathfrak{p}$ に属する primary ideal である事が簡単にわかる。

今 $\mathfrak{q} \not\supseteq \mathfrak{q}_{s+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ とすれば $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{f}(\bar{A}/A)$ の prime divisor 故, $^\exists \beta \in \bar{A}$ $\mathfrak{a}_\beta$ は $\mathfrak{p}$ に属する primary ideal である。以上によって (iii) の α をとくに $\alpha \in \bar{A}$ とする事が出来る。さて (i) を示そう。$ht\,\mathfrak{p} = i$ とする。

$\mathrm{Spec}\,A \ni \mathfrak{q}$ で $ht\,\mathfrak{q} \leq i-1$ とすれば $\mathfrak{q} \not\supseteq \mathfrak{a}_\alpha$ 故 $\alpha \in A_\mathfrak{q}$. よって $\alpha \in A_{i-1}$ である。さて今 $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{f}(A_{i-1}/A)$ とすれば $A_\mathfrak{p} \supseteq A_{i-1}$ であるが, $\alpha \in A_{i-1}$ で $\alpha \notin A_\mathfrak{p}$ であるから, これは矛盾。

系；Aを有限次元ネーター整域で，$\bar{A}$は有限生成A-加群であれば，単項イデアルのembedded prime componentsとなり得る素イデアルは有限個である。

3. Seminormalization及びSeminormalについて。

Traversoによって導入されたseminormalの話は大石彰君が詳しく述べておられるのでここでは定義のみとします。

$J(B)$をBのJacobson radicalとして，

$${}^{+}_{R}A = \{ R \ni \alpha ,\ \alpha \in A_{\mathfrak{p}} + J(R_{\mathfrak{p}}) ,\ {}^{\forall}\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \}$$

をAのRの中でのseminormalizationといい，${}^{+}_{R}A = A$のとき，AはRの中でseminormalであるという。

4. Seminormalであるための判定法。

Traversoによって，AがRの中でseminormalである必要充分条件は，勝手なR/Aの中間環Bに対して，$\mathfrak{c}(B/A)$がBのradical ideal（Bの素イデアルの共通部分として表わされる）であることがわかっているが，実は次の定理として，seminormalの判定法が得られる。

定理1．AがRの中でseminormalであるための必要充分条件は，$\mathfrak{c}(A_c(R)/A)$が$A_c(R)$のradical idealである事。

証明．AがRの中でseminormalであれば，$A_c(R)$はR/Aの中間環故，Traversoの結果である。

$\mathfrak{C}(A_i(R)/A)$ が $A_i(R)$ の radical ideal として，${}^{+}_{R}A = A$ である事を示す。そのために ${}^{+}_{R}A \subseteq A_{i-1}(R)$ と仮定して，${}^{+}_{R}A \subseteq A_i(R)$ を示そう。そのためには $A_i(R) = A_{i-1}(R) \cap \bigcap A_{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_i(A,R)$，故 $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_i(A,R)$ に対して ${}^{+}_{R}A \subseteq A_{\mathfrak{q}}$ である事を示せれば良い。

$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{C}(A_{i-1}(R)/A)$ の minimal prime divisor で $\mathfrak{C}(A_{i-1}(R)/A)$ は $A_{i-1}(R)$ の radical ideal であるから我々は

$$J(A_{i-1}(R)_{\mathfrak{q}}) = J(A_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$$ を得る。

さて $\forall \alpha \in {}^{+}_{R}A$ をとると，定義より $\alpha \in A_{\mathfrak{q}} + J(R_{\mathfrak{q}})$ だから $\alpha = a + \beta$, $a \in A_{\mathfrak{q}}$, $\beta \in J(R_{\mathfrak{q}})$ と出来る。さて $\alpha \in A_{i-1}(R)_{\mathfrak{q}}$ で $A_{\mathfrak{q}} \subseteq A_{i-1}(R)_{\mathfrak{q}}$ 故 $\beta \in J(R_{\mathfrak{q}}) \cap A_{i-1}(R)_{\mathfrak{q}} = J(A_{i-1}(R)_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} \subseteq A_{\mathfrak{q}}$ ∴ $\alpha \in A_{\mathfrak{q}}$

以上によって ${}^{+}_{R}A \subseteq A_d(R) = A$ を得る。

Traverso の論文で述べられている glueing を次の様に定義しよう。この際"柳原さんの考えておられる glueing"とまぎらわしいので，relatively glueing と呼ぼう。というのは，始めから R/A が integral として，R/A の中間環として glueing したものを与えるからです。

定義；$\mathrm{Spec}\,A \ni \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$, $\mathfrak{p}_i$ 上の R の prime ideals のすべてを $P_{i1}, \cdots, P_{ie_i}$, $e_i \geq 1$, とする。素イデアル $\mathfrak{p}$ の residue field を $k(\mathfrak{p})$，元 f の residue class を $f(\mathfrak{p})$ 等

とかくとき,

$$G(\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_t,A)=\{R\ni f,\ f(P_{11})=\cdots=f(P_{1e_1})\in k(\mathfrak{p}_1),$$

$$\cdots\cdots,\ f(P_{t1})=\cdots=f(P_{te_t})\in k(\mathfrak{p}_t)\}$$ と定義する。

このとき Traverso の結果は次の形で表わされる。

定理2. $D(A,R)=\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_t\}$ とすれば,

$$^{+}_{R}A=A \iff A=G(\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_t,A)$$

証明. $\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_u$ を A の素イデアルとして, $B=G(\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_u,A)$ とおくとき, B は R の中で seminormal である事を見よう。B の R の中での seminormalization は Traverso によって次の様に特徴付けられる。

P を B の勝手な素イデアルとして, P 上の $^{+}_{R}B$ の素イデアルは唯一つ, それを P' とすれば $k(P)=k(P')$ である。$^{+}_{R}B$ はこの性質をもつ最大の R/B の中間環である。

$\mathfrak{q}_i$ 上の R の素イデアルを $Q_{i1},\cdots,Q_{ie_i}$, $e_i\geq 1$, とすれば明らかに $Q_{i1}\cap B=\cdots\cdots=Q_{ie_i}\cap B$ である。これを Q_i とおくと, $k(\mathfrak{q}_i)=k(Q_i)$ が成り立つ。$^{+}_{R}B$ の性質から, $^{+}_{R}B$ には, Q_i 上の素イデアルはただ1つで, それを Q_i' とすれば $k(Q_i)=k(Q_i')$ であるから, $^{+}_{R}B\subseteq G(\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_u,A)\subseteq B$, よって $B={}^{+}_{R}B$ を得る。従って $A=G(\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_t,A)$ ならば $^{+}_{R}A=A$ である。

逆を示そう。$G(\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_t,A)\supseteq A$ は明らか。

$\mathfrak{B} = G(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_u, A)$ とおく。 $A = \mathfrak{B}$ を見るためには, $A_d(R) = A$ だから, $A_{i-1}(R) \geqq \mathfrak{B}$ ならば $A_i(R) \geqq \mathfrak{B}$ である事を示せれば良い。 そのためには $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_{i-1}(A, R)$ に対して, $A_{\mathfrak{q}} \geqq \mathfrak{B}$ を示せれば良い。 α を $\mathfrak{B}$ の元として, $\mathfrak{a}_\alpha = \{A \ni a, a\alpha \in A\}$ とする。 $\alpha \in A_{i-1}(R)$ と仮定したので, $\mathfrak{z}$ を A の素イデアルで, $ht\,\mathfrak{z} \leqq i-2$ ならば $\mathfrak{z} \not\supseteq \mathfrak{a}_\alpha$。 よって $\mathfrak{a}_\alpha \neq (1)$ とすれば $\mathfrak{a}_\alpha$ の prime divisor はすべて $i-1$ 以上の高さをもつ。 $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}(A) = \{\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_t\}$ 故 $\mathfrak{q} = \mathfrak{z}_1$ としよう。 このとき, $\mathfrak{B} = G(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_t, A) \ni \alpha$ 故, $\alpha(P_{11}) = \cdots = \alpha(P_{1e_1}) \in k(\mathfrak{z}_1)$, 従って $\xi \in A_{\mathfrak{z}_1}$ があって, $\alpha - \xi \in J(R_{\mathfrak{z}_1})$, よって $\alpha \in A_{\mathfrak{z}_1} + J(R_{\mathfrak{z}_1})$ である。 $\mathfrak{z}$ を A の素イデアルで $\mathfrak{z} \subsetneqq \mathfrak{z}_1$ とすれば, $ht\,\mathfrak{z} \leqq i-2$ だから $\mathfrak{a}_\alpha \not\subseteq \mathfrak{z}$, よって $\alpha \in A_{\mathfrak{z}} \subseteq A_{\mathfrak{z}} + J(R_{\mathfrak{z}})$. 従って, $\alpha \in {}^{+}_{R_{\mathfrak{z}_1}}A_{\mathfrak{z}_1} = A_{\mathfrak{z}_1} = A_{\mathfrak{q}}$, よって $\mathfrak{B} \subseteq A_i(R)$ を得る。

$A = G(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_t, A)$ において, $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_t$ のどの一つもはぶく事が出来ない。それを次の命題として示そう。

命題4. $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_u$ を A の素イデアルで $\mathfrak{B} = G(\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_u, A)$ とすれば, $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_u$ 上の $\mathfrak{B}$ の素イデアルはそれぞれ唯一つ存在して, それを $Q_1, \dots, Q_u$ とすれば $\mathfrak{D}(\mathfrak{B}, R) \subseteq \{Q_1, \dots, Q_u\}$。

証明。 今 $\mathfrak{q}_1$ 上の R の素イデアルがただ1つで, それを Q として, $k(\mathfrak{q}_1) = k(Q)$ であれば relatively glueing の定義

によって $B = G(\mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_u, A)$ である。そこで $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_u$ に対して、R の $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_u$ 上の素イデアルは2つ以上存在するか、そうでないときには *residue fields* が一致しないと仮定してよい。*relatively glueing* の定義から $\mathfrak{q}_i$ 上の B の素イデアルは唯一つ存在するが、それを Q_i とおく。

$Q_1, \cdots, Q_u$ をならびかえて、新しく *index* をつけよう。
$\{Q_1, \cdots, Q_u\} = \{Q_{ij} \quad 1 \leq i \leq d, \ 1 \leq j \leq e_i, \ ht\, Q_{ij} = i\}$ とする。

今 $B_{(i)} = G(\mathfrak{q}_{k,l} \quad k \geq i, A)$ とおくと、明らかに $B_{(i)} = G(Q_{k,l}, k \geq i, B)$ である。このとき、$B_{(i)} = B_i(R)$ である事を i に関する帰納法で示す。

$B_{(i-1)} = B_{i-1}(R)$ と仮定して、$B_{(i)} = B_i(R)$ を示す。

$B_{i-1}(R) = B_{(i-1)} = G(Q_{kl}, k \geq i-1, A)$ で $B = G(Q_{k,l}, A)$
故 $\bigcap_{n=i}^{d} Q_{nl} \subsetneqq \mathfrak{a}({}^{B_{i-1}(R)}/_{B})$、従って $\mathcal{D}_i(B, R) \subseteq \{Q_{ij}\}$ である。今 $\mathcal{D}_i(B, R) = \{Q_{i1}, \cdots, Q_{if_i}\}$, $f_i \leq e_i$, とする。
したがって $B_i(R) = B_{i-1}(R) \cap \bigcap_{j=1}^{f_i} B_{Q_{ij}}$ である。

α を $B_{Q_{ij}} \cap R$ の元とする。$\mathfrak{q}_{ij}$ 上の R の素イデアルを $P_1, \cdots, P_n$ とすれば、$P_1, \cdots, P_n$ は又 Q_{ij} 上の R の素イデアルでもある。

さて $\alpha \in B_{Q_{ij}}$ 故 $\alpha = \frac{b}{a}$, $a, b \in B$ とかけるから、
$a(P_1) = \cdots = a(P_n) \neq 0$, $b(P_1) = \cdots = b(P_n)$ であってともに $k(Q_{ij}) = k(\mathfrak{q}_{ij})$ の元である。よって $\alpha(P_1) = \cdots = \alpha(P_n) \in k(\mathfrak{q}_{ij})$。

従って $B_i(R) = B_{i-1}(R) \cap \bigcap_{j=1}^{f_i} B_{Q_{ij}} \subseteq B_{(i)}$ がわかった。

逆に，α を $B_{(i)}$ の元として $\alpha \in B_i(R)$ を示そう。

$B_i(R) \subseteqq B_{i-1}(R)$ 故 $\alpha \in B_{i-1}(R) = \bigcap_{\mathrm{ht}\,Q \leqq i-1} B_Q$。一方 $B_{(i)}$ の定義から $\alpha \in B_{Q_{ij}} + J(R_{Q_{ij}})$ 故 $\alpha \in {}^{+}_{R_{Q_{ij}}}B_{Q_{ij}}$ であるが，B は R/A の relatively glueing で与えられているので，B は R の中で seminormal，よって $B_{Q_{ij}}$ も又 seminormal だから，ここで $\alpha \in B_{Q_{ij}}$ を得る。よって $\alpha \in B_i(R)$，$\therefore$ $B_i(R) = B_{(i)}$

そして証明の途中で我々は $\mathbb{D}_i(B, R) \subseteqq \{Q_{i1}, \dots, Q_{ie_i}\}$ を得ていたので，$\mathbb{D}(B, R) \subseteqq \{Q_1, \dots, Q_u\}$ である。

今 $\mathbb{D}(A, R) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_u\}$ として $A = G(\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_u, A)$ として得られるならば，今の命題から $\mathbb{D}(A, R) \subseteqq \{\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_u\}$ となり矛盾。